§ 4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Кинетический момент точки и системы

Наряду с количеством движения в качестве векторной меры движения можно использовать *кинетический момент*, или *момент количества движения*. Для материальной точки

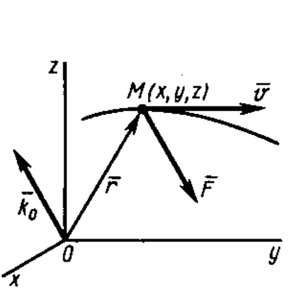

Рис. 47

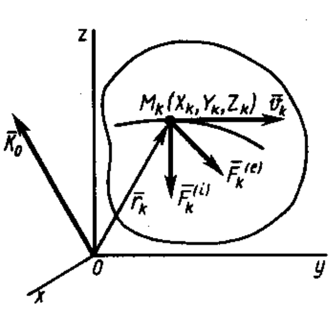

Рис. 48

массой m, движущейся со скоростью $\bar{v}$, кинетическим моментом $\bar{k}_O$ относительно какого-либо центра O называют момент количества движения точки относительно этого центра O (рис. 47), т. е.

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}. \tag{19}$$

Кинетический момент $\bar{k}_O$ приложен к точке O, относительно которой он вычисляется.

Проецируя обе части (19) на прямоугольные декартовы оси, получаем кинетические моменты точки относительно этих осей координат, если точка O является началом осей координат:

$$\left.\begin{aligned} k_x &= M_x(m\bar{v}) = m(yv_z - zv_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y});\\ k_y &= M_y(m\bar{v}) = m(zv_x - xv_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}).\\ k_z &= M_z(m\bar{v}) = m(xv_y - yv_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}).\end{aligned}\right\} \tag{19'}$$

В физике кинетический момент точки иногда называют *моментом импульса точки.*

Единица кинетического момента в СИ — кг · м²/с, или Н · м · с.

Для механической системы кинетическим моментом $\bar{K}_O$ (или главным моментом количества движения системы относительно какой-либо точки O) называют векторную сумму кинетических моментов точек этой системы, взятых относительно точки O (рис. 48), т. е.

$$\bar{K}_O = \Sigma\, \bar{M}_O(m_k\bar{v}_k) = \Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k. \tag{20}$$

Кинетический момент системы $\bar{K}_0$ приложен к точке O, относительно которой он вычисляется.

Если спроецировать (20) на прямоугольные декартовы оси координат, то получим проекции кинетического момента на эти оси, или кинетические моменты относительно осей координат:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \Sigma\, M_x(m_k\bar{v}_k) = \Sigma\, m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k);\\ K_y &= \Sigma\, M_y(m_k\bar{v}_k) = \Sigma\, m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k);\\ K_z &= \Sigma\, M_z(m_k\bar{v}_k) = \Sigma\, m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k).\end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

Кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела

Вычислим кинетический момент твердого тела относительно оси вращения, когда тело вращается вокруг этой неподвижной оси с угловой скоростью ω (рис. 49). По определению кинетического момента относительно оси [(см. формулы (20′)] имеем

$$K_z = \Sigma\, M_z(m_k\bar{v}_k).$$

Но при вращении тела вокруг оси $v_k = h_k\omega$, причем количество движения точки $m_k\bar{v}_k$ перпендикулярно отрезку h_k и лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения Oz. Следовательно, момент количества движения относительно оси Oz для одной точки

$$M_z(m_k\bar{v}_k) = h_k m_k v_k = m_k h_k^2\, \omega.$$

Для всего тела

$$K_z = \Sigma\, m_k h_k^2\, \omega = \omega\, \Sigma\, m_k h_k^2 = \omega J_z,$$

т. е.

$$K_z = J_z\omega. \tag{21}$$

Таким образом, *кинетический момент тела относительно оси вращения при вращательном движении равен произведению угловой скорости тела на его момент инерции относительно оси вращения.* Знак кинетического момента относительно оси совпадает со знаком угловой скорости вращения вокруг этой оси: при вращении против часовой стрелки кинетический момент положительный; при вращении по часовой стрелке — отрицательный.

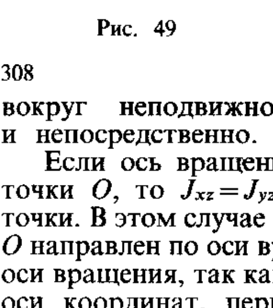

Рис. 49

Дополнительно без вывода приведем формулы для кинетических моментов относительно двух других осей координат Ox и Oy, перпендикулярных оси вращения Oz. Имеем

$$K_x = -J_{xz}\,\omega;\quad K_y = -J_{yz}\,\omega,$$

где $J_{xz} = \Sigma\, m_k x_k z_k$ и $J_{yz} = \Sigma\, m_k y_k z_k$ — центробежные моменты инерции.

Эти формулы можно получить как частный случай более общих формул для случая вращения твердого тела

вокруг неподвижной точки. Они могут быть получены и непосредственно.

Если ось вращения Oz является главной осью инерции для точки O, то $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и, следовательно, $K_x = K_y = 0$ для этой точки. В этом случае кинетический момент $\bar{K}_O$ относительно точки O направлен по оси вращения. В общем случае $\bar{K}_O$ не направлен по оси вращения, так как имеет не равные нулю проекции K_x и K_y на оси координат, перпендикулярные оси вращения Oz.

Теорема об изменении кинетического момента точки

Для материальной точки основной закон динамики можно представить в виде

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Умножая обе части этого соотношения слева векторно на радиус-вектор $\bar{r}$ (см. рис. 48), получаем

$$\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \tag{22}$$

В правой части этой формулы имеем момент силы относительно неподвижной точки O. Преобразуем левую часть, применив формулу производной от векторного произведения:

$$\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}.$$

Но

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$$

как векторное произведение параллельных векторов.

После этого из (22) получаем

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F},$$

или

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}). \tag{23}$$

Таким образом, *первая производная по времени от кинетического момента точки относительно какого-либо центра равна моменту силы относительно того же центра.*

Это и есть теорема об изменении кинетического момента для точки.

Проецируя (23) на прямоугольные декартовы оси координат, получаем теоремы об изменении кинетического момента точки относительно этих осей координат:

$$dk_x/dt = M_x(\bar{F});\quad dk_y/dt = M_y(\bar{F});\quad dk_z/dt = M_z(\bar{F}). \tag{23'}$$

Теорема об изменении кинетического момента системы

Если к точкам системы приложить все внешние и внутренние силы (рис. 48), то для каждой точки системы можно выразить теорему об изменении кинетического момента в форме (23), т. е.

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)},\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Суммируя правые и левые части этих соотношений по всем точкам системы и заменяя суммы производных производной от суммы, получаем

$$\frac{d}{dt}\Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k = \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}.$$

Так как, по свойству внутренних сил,

$$\Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0,$$

а по определению кинетического момента системы,

$$\Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k = \bar{K}_O,$$

то

$$d\bar{K}_O/dt = \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Если обозначить главный момент всех внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$, т. е.

$$\bar{L}_O^{(e)} = \Sigma\, \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

то теорему об изменении кинетического момента системы можно представить в виде

$$d\bar{K}_O/dt = \bar{L}_O^{(e)}. \tag{24}$$

Следовательно, *первая производная по времени от кинетического момента системы относительно какой-либо точки равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему, относительно той же точки.*

В эту теорему входит кинетический момент системы $\bar{K}_O$ в ее движении относительно инерциальной системы отсчета, причем кинетический момент и моменты внешних сил вычисляются относительно неподвижной в этой системе отсчета точки O. Получим теорему об изменении кинетического момента системы такого же движения, но выберем в качестве точки при вычислении кинетического момента и моментов внешних сил точку A, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета со скоростью $\bar{v}_A$.

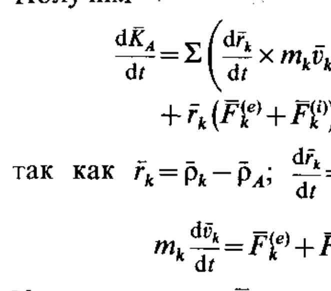

Рис. 50

По определению кинетического момента системы относительно точки A имеем (рис. 50)

$$\bar{K}_A = \Sigma\, \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k.$$

Вычислим производную по времени от кинетического момента $\bar{K}_A$ по правилу дифференцирования векторных произведений. Получим

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = \Sigma\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k\bar{v}_k + \bar{r}_k \times m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt}\right) = \Sigma\left[(\bar{v}_k - \bar{v}_A) \times m_k\bar{v}_k + \right.$$

$$\left. + \bar{r}_k(\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)})\right] = -\bar{v}_A \times \Sigma\, m_k\bar{v}_k + \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

так как $\bar{r}_k = \bar{\rho}_k - \bar{\rho}_A$; $\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} - \frac{d\bar{\rho}_A}{dt} = \bar{v}_k - \bar{v}_A$;

$$m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)};\quad \bar{v}_k \times m_k\bar{v}_k = 0;\quad \Sigma\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0.$$

Учитывая, что $\bar{Q} = \Sigma\, m_k\bar{v}_k = M\bar{v}_C$, получим

$$d\bar{K}_A/dt = -\bar{v}_A \times M\bar{v}_C + \Sigma\, \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

или

$$d\bar{K}_A/dt = M\bar{v}_C \times \bar{v}_A + \bar{L}_A^{(e)}.$$

Рассмотрим частные случаи этой теоремы.

1. Если точка A совпадает с центром масс C, то $M\bar{v}_C \times \bar{v}_C = 0$ и теорема принимает форму

$$d\bar{K}_C/dt = \bar{L}_C^{(e)}.$$

2. Если в случае плоского движения твердого тела выбрать в качестве точки A мгновенный центр скоростей P, то $\bar{v}_A = \bar{v}_P \neq 0$, так как в рассматриваемом случае $\bar{v}_P$ есть скорость движения мгновенного центра скоростей по неподвижной центроиде, а она не равна нулю в отличие от скорости точки тела, совпадающей с точкой P, которая равна нулю. Очевидно, $\bar{v}_P \times M\bar{v}_C = 0$, если $\bar{v}_P$ параллельна $\bar{v}_C$, т. е. если касательные к центроидам и траектории центра масс параллельны или, что то же самое, центр масс находится на нормали к центроидам в точке P. Тогда

$$d\bar{K}_P/dt = \bar{L}_P^{(e)}.$$

Эти частные случаи показывают, что *для подвижных точек центра масс для любой системы и мгновенного центра скоростей при плоском движении твердого тела в рассмотренном случае теорема об изменении кинетического момента для абсолютного движения имеет ту же форму, что и для неподвижной точки O.*

Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента системы. Они могут влиять на него только через внешние силы, т. е. неявно.

Проецируя (24) на прямоугольные декартовы оси координат, получаем теоремы об изменении кинетического момента системы относительно этих осей координат, т. е.

$$dK_x/dt = L_x^{(e)};\quad dK_y/dt = L_y^{(e)};\quad dK_z/dt = L_z^{(e)}. \tag{24'}$$

Теорема об изменении кинетического момента позволяет изучать вращательное движение твердого тела вокруг оси и точки или вращательную часть движения тела в общем случае движения свободного твердого тела.

Законы сохранения кинетических моментов

Выведем законы сохранения кинетических моментов для системы, рассматривая материальную точку как механическую систему, у которой число точек равно единице. Естественно, что для одной материальной точки все действующие на нее силы являются внешними. Возможны следующие частные случаи теоремы об изменении кинетического момента системы.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно точки O равен нулю, т. е. $\bar{L}_O^{(e)} = 0$, то, согласно (24), кинетический момент системы $\bar{K}_O$ относительно той же точки постоянен по модулю и направлению, т. е.

$$\bar{K}_O = \overrightarrow{\mathrm{const}}. \tag{25}$$

Этот частный случай теоремы об изменении кинетического момента системы называют **законом сохранения кинетического момента**. В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат по этому закону

$$K_x = C_1;\quad K_y = C_2;\quad K_z = C_3, \tag{25'}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные величины.

Соотношения (25′) являются первыми интегралами дифференциальных уравнений движения системы (3). Закон сохранения кинетического момента системы показывает, что одни внутренние силы не могут изменить кинетический момент системы, так же как они не изменяют ее количество движения.

2. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси Ox равна нулю, т. е. $L_x^{(e)} = \Sigma\, M_x(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$, то из (24′) следует, что

$$K_x = \mathrm{const}. \tag{26}$$

Следовательно, *кинетический момент системы относительно какой-либо координатной оси постоянен, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю,* что, в частности, наблюдается, когда внешние силы параллельны оси или пересекают ее. В частном случае для тела или системы тел, которые все вместе могут вращаться вокруг неподвижной оси, и если при этом

$$L_z^{(e)} = \Sigma\, M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0,$$

то

$$K_z = J_z\,\omega = \mathrm{const}$$

или

$$J_z\omega = J_{z_0}\omega_0, \tag{27}$$

где J_z и ω — момент инерции системы тел и их угловая скорость относительно оси вращения в произвольный момент времени t; J_{z0} и ω_0 — момент инерции тел и их угловая скорость в момент времени, выбранный за начальный, например при $t = 0$.

Закон сохранения кинетического момента в форме (27) используют в своей деятельности акробаты, прыгуны, танцоры и т. д. Наглядно его можно продемонстрировать в опыте на скамье Жуковского (рис. 51). Если человек с гирями в руках встанет на горизонтальную платформу скамьи Жуковского, которая может вращаться вокруг вертикальной оси почти без трения, и затем ему сообщить угловую скорость вокруг этой оси, то

$$J_{z0}\omega_0 = J_z\omega,$$

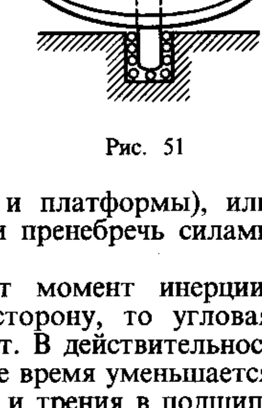

Рис. 51

так как внешние силы или параллельны оси вращения (силы веса человека, гирь и платформы), или пересекают ось (реакции подшипника, если пренебречь силами трения).

Следовательно, если человек увеличит момент инерции, например разведением рук с гирями в сторону, то угловая скорость вращения уменьшится, и наоборот. В действительности угловая скорость хотя и медленно, но все время уменьшается вследствие наличия сопротивления воздуха и трения в подшипнике скамьи.